MENENTUKAN MODEL PELUANG KEBANGKRUTAN PERUSAHAAN ASURANSI DENGAN PERSAMAAN INTEGRO-DIFERENSIAL

Inayatul Qudsiyah[1], Hery Tri Sutanto[2] , Affiati Oktaviarina[3]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231
[2] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231
[3] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231
Email: naymickey@yahoo.co.id[1], herytrisutanto@gmail.co.id[2], affiatioktaviarina@yahoo.co.id[3]

ABSTRAK

Skripsi ini berisi tentang model resiko klasik dalam asuransi dan membahas mengenai hasil peluang kebangkrutan dalam waktu takterbatas. Untuk menentukan model peluang kebangkrutan penulis menggunakan persamaan integro-diferensial. Akumulasi klaim diasumsikan berdistribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial. Pada akhir skripsi, hasil perhitungan numerik menggunakan sofware Maple 11 yang akan ditampilkan dalam bentuk tabel dan grafik.

Model peluang kebangkrutan dengan persamaan integro-diferensial dimana besar klaim distribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial adalah sebagai berikut :

$$\psi(u) = -\frac{A_1}{p_1}e^{p_1 u} - \frac{A_2}{p_2}e^{p_2 u}, u \geq 0$$

Berdasarkan analisis model peluang kebangkrutan dan perhitungan numerik menunjukkan bahwa kecilnya peluang kebangkrutan perusahaan asuransi disebabkan karena besarnya modal awal (u) atau *premium loading* (θ) dan besarnya peluang kebangkrutan asuransi disebabkan karena besarnya jumlah klaim yang dikeluarkan (α atau β) .

Kata kunci : proses surplus, distribusikombinasi linier dari dua distribusi eksponensial, persamaan integro-diferensial, peluang kebangkrutan.

PENDAHULUAN

Perusahaan asuransi memperoleh pendapatan dari pembayaran premi para pemegang polis. Di sisi lain, perusahaan harus mengeluarkan biaya untuk pembayaran klaim yang diajukan para pemegang polis. Dengan demikian, pendapatan bersih yang diperoleh perusahaan asuransi akan berubah dari waktu ke waktu, bergantung pada jumlah premi yang masuk dan jumlah klaim yang akan dibayarkan. Jika suatu ketika besar modal awal dan total premi yang masuk lebih kecil dari besar akumulasi klaim yang harus dibayarkan, maka perusahaan asuransi akan mengalami kebangkrutan.

Dalam perusahaan asuransi, proses surplus adalah proses akumulasi kekayaan yang diperoleh dari jumlah modal awal dan total premi yang masuk, kemudian dikurangi dengan total akumulasi klaim yang harus dibayarkan. Jika besar proses surplus bernilai negatif maka perusahaan asuransi akan mengalami kebangkrutan. Kendala dalam menghitung peluang kebangkrutan adalah mencari model dari peluang kebangkrutan tersebut. Dengan latar belakang tersebut, penulis akan membahas mengenai penentuan model peluang kebangkrutan perusahaan asuransi dengan persamaan integro-diferensial yang dipengaruhi oleh modal awal perusahaan, pendapatan dari penerimaan premi serta pengeluaran atas klaim-klaim yang harus dibayarkan oleh perusahaan asuransi, dimana besar klaim mengikuti distribusi kontinu yaitu distribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial, kemudian mencari perhitungan numerik dari model peluang kebangkrutan dengan program matematika Maple11 sehingga dapat dianalisis dan diketahui apa saja yang dapat mempengaruhi besar kecilnya peluang kebangkrutan perusahaan asuransi tersebut.

KAJIAN TEORI

2.1 Proses Stokastik

Proses stokastik $\underline{X} = \{X(t), t \in T\}$ adalah suatu koleksi himpunan dari peubah acak. Untuk setiap t dalam himpunan indeks T, $X(t)$ merupakan peubah acak. Jika t menyatakan waktu, maka $X(t)$ menyatakan kondisi proses saat t. Jika T himpunan indeks terhitung maka, $\underline{X}$ disebut proses stokastik waktu diskrit dan jika T kontinu, maka $\underline{X}$ disebut proses stokastik waktu kontinu.

(Ross, 1996)

2.2 Proses Surplus

Menurut Kaas R *et al* (2001) proses surplus atau proses risiko klasik dapat didefinisikan sebagai berikut: $U(t) = u + ct - S(t), t \geq 0$

Dimana :

$U(t)$ adalah proses surplus sampai waktu t,

$u = U(0)$ adalah modal awal atau surplus awal,

c adalah premi diperoleh secara kontinu dengan laju pertumbuhan konstan persatuan waktu,

$S(t)$ adalah akumulasi klaim yang telah dibayar mengikuti fungsi $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)}$, dengan $N(t)$ adalah banyaknya klaim yang muncul sampai waktu t, dan X_i adalah besar klaim ke-i, asumsikan besar X_i tidak negatif.

(Yuli Andriani, 2008)

2.3 Peluang Kebangkrutan (*Ruin Probabilities*)

Definisi 2.3.1 Dalam waktu kontinu, peluang suvival dalam waktu takterbatas diberikan sebagai berikut :

$$\phi(u) = \Pr(U(t) \geq 0 \text{ untuk setiap } t \geq 0 \,|\, U(0) = u)$$

(Klugman *et al*, 1998)

Definisi 2.3.2 Dalam waktu kontinu, peluang survival dalam waktu terbatas diberikan sebagai berikut :

$$\phi(u,T) = \Pr(U(t) \geq 0 \text{ untuk setiap } 0 \leq t \leq T \,|\, U(0) = u)$$

(Klugman *et al*, 1998)

Definisi 2.3.3 Dalam waktu kontinu, peluang kebangkrutan dalam waktu takterbatas diberikan sebagai berikut :

$$\psi(u) = 1 - \phi(u)$$

(Klugman *et al*, 1998)

PEMBAHASAN

3.1 Proses Surplus Poisson Majemuk

Dalam perusahaan asuransi, proses surplus adalah proses akumulasi kekayaan yang dinotasikan dengan $U(t)$ yang didefinisikan oleh Bowers *et al* (1997) sebagai berikut :

$$U(t) = u + ct - S(t), t \geq 0 \text{ dan } U(0) = u$$

dengan $S(t)$ didefinisikan oleh Dickson (2005) sebagai :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, X_i > 0 \text{ untuk } i = 1,2,3,\ldots,N(t).$$

Jika $N(t)$ adalah banyaknya klaim yang terjadi dalam interval waktu $[0,t]$, maka $N(t) \geq 0$, $N(t)$ bernilai bulat, $N(t_1) \leq N(t_2)$ untuk $t_1 < t_2$ dan untuk $t_1 < t_2$, $N(t_2) - N(t_1)$ menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu $(t_1, t_2]$. Sehingga menurut definisi proses menghitung, $N(t)$ adalah *counting prosess*. Jika $\{N(t), t \geq 0\}$ diasumsikan sebagai proses Poisson dengan laju λ. X_i dengan $i = 1,2,3,\ldots,N(t)$ diasumsikan sebagai peubah acak kontinu sebanyak $N(t)$ yang saling bebas dan identik dan X_i juga bebas terhadap $N(t)$, maka menurut Definisi proses Pisson Majemuk, maka $\{S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t \geq 0\}$ adalah proses Poisson majemuk. Karena $\{N(t), t \geq 0\}$ merupakan kenaikan stationer dan kenaikan bebas, maka $\{S(t), t \geq 0\}$ juga merupakan kenaikan stationer dan kenaikan bebas. Sehingga,

$$E(S(t)) = E(N(t))E(X_i) = (\lambda t)(\mu) = \lambda \mu t$$

(Klugman *et al*, 1998)

Asumsikan premi mempunyai tambahan premi, dimana $ct > E(S(t))$, akibatnya $c > \lambda\mu$. Maka dapat dimisalkan bahwa $c = (1+\theta)\lambda\mu$ (3.1) dimana $\theta > 0$ yang disebut dengan *premium loading* .

3.7 Koefisien Penyesuaian (*Adjustment Coefficient*)

Definisi 4.7.1 Misal $r = \kappa$ solusi positif terkecil untuk persamaan : $1 + (1+\theta)\mu r = M_X(r)$ (3.2) dengan $M_X(r) = E(e^{rX})$ adalah fungsi pembangkit momen dari peubah acak X (besar klaim). Jika nilai κ ada maka itu dinamakan koefisien penyesuaian.

(Klugman *et al*, 1998)

3.8 Batas Atas Peluang Kebangkrutan (*Lundberg's Inequality*)

Teorema 3.8.1 Pada proses surplus, dimisalkan $\psi(u)$ adalah peluang kebangkrutan, dengan *u* merupakan modal awal, serta *r* merupakan koefisien penyesuaian, maka untuk *r > 0*, batas atas peluang kebangkrutan dari proses surplus adalah :

$$\psi(u) \leq e^{-ru}, u \geq 0 \qquad (3.3)$$

Pertidaksamaan (4.3) dinamakan pertidaksamaan *Lundberg*.

(Klugman *et al*, 1998)

3.9 *Premium Loading*

Premium loading (θ) adalah presentase tambahan premi dari nilai harapan klaim. Nilai *premium loading* (θ) ditentukan oleh perusahaan asuransi itu sendiri, seberapa besar nilai tambahan premi yang diperlukan (untuk mengurangi peluang kebangkrutan). Untuk menentukan nilai *premium loading*, dapat dicari dengan cara sebagai berikut :

Misalkan ditentukan batas toleransi maksimal dari peluang kebangkrutan adalah α, berarti $\psi(u) \leq \alpha, 0 < \alpha < 1$

Berdasarkan Persamaan (3.3) dapat ditentukan besar nilai *r* sebagai berikut : $r = -\dfrac{\ln \alpha}{u}$

Nilai premium loading (θ) dapat ditentukan sebagai berikut :

$$1 + (1+\theta)\mu r = E(e^{rX})$$

$$\theta = u\left(\frac{E(e^{-\frac{\ln\alpha}{u}X}) - 1}{-\mu \ln \alpha}\right) - 1$$

3.10 Persamaan Integro-Diferensial

Definisi 3.10.1 *G(u,y)* adalah peluang terjadinya kebangkrutan dengan modal awal *u* dan setelah terjadi kebangkrutan akan terjadi defisit paling banyak *y*, dimana $u \geq 0, y \geq 0$.

Misalkan akan terjadi surplus setelah terjadi bangkrut antara 0 dan –*y*, dengan peluang kebangkrutan $\psi(u)$, ditulis

$$\psi(u) = \lim_{y\to\infty} G(u,y), u \geq 0, y \geq 0 \qquad (3.4)$$

(Klugman *et al*, 1998)

Teorema 3.10.1 Fungsi *G*(*u*,*y*) memenuhi persamaan :

$$\frac{\partial}{\partial u}G(u,y) = \frac{\lambda}{c}G(u,y) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u G(u-x,y)dF(x) - \frac{\lambda}{c}[F(u+y) - F(u)] \qquad (3.5)$$

dengan $u \geq 0$.

(Klugman et al,1998)

Teorema 3.10.2 Fungsi *G(0,y)* memenuhi persamaan berikut :

$$G(0,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^y [1-F(x)]dx \qquad (3.6)$$

(Klugman *et al*, 1998)

Teorema 3.10.3 Peluang bertahan dengan tidak ada modal awal *u* adalah $\phi(0) = \dfrac{\theta}{1+\theta}$ (3.7)

dimana θ merupakan *premium loading*.

(Klugman *et al*, 1998)

Teorema 3.10.4 Peluang survival $\phi(u)$ memenuhi persamaan berikut :

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)dF(x) \qquad (3.8)$$

(Klugman *et al*, 1998)

3.11 Distribusi Kombinasi Linier dari Dua Distribusi Eksponensial

Jika peubah acak kontinu *X* tersebar kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial dengan parameter *α* dan *β* dengan proporsi *b* dan (1-*b*), maka fungsi densitas peluangnya menurut Garcia (2005) dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = b\alpha e^{-\alpha x} + (1-b)\beta e^{-\beta x}$$

dengan $x \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dan $0 \leq b \leq 1$.

(Amiruddin, 2008)

Nilai harapan dari distribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial sebagai berikut :

$$E[X] = \frac{b}{\alpha} + \frac{(1-b)}{\beta}$$

3.12 Model Peluang Kebangkrutan dimana Besar Klaim Berdistribusi Kombinasi Linier dari Dua Distribusi Eksponensial

Substitusikan fungsi densitas peluang distribusi kombinasi linier dari distribusi Eksponensial pada persamaan integro-diferensial.

$$\phi'(u)=\frac{\lambda}{c}\phi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\phi(u-x)dF(x)$$

$$=\frac{\lambda}{c}\phi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\phi(u-x)f(x)dx$$

$$=\frac{\lambda}{c}\phi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\phi(u-x)b\alpha e^{-\alpha x}dx-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\phi(u-x)(1-b)\beta e^{-\beta x}dx$$

Misal : $y = u - x$ sehingga,

$$\phi'(u)=\frac{\lambda}{c}\phi(u)-\frac{\lambda}{c}b\alpha e^{-\alpha u}\int_0^u\phi(y)e^{\alpha y}dy-\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta e^{-\beta u}\int_0^u\phi(y)e^{\beta y}dy \qquad (3.10)$$

$$\frac{\lambda}{c}b\alpha e^{-\alpha u}\int_0^u\phi(y)e^{\alpha y}dy=\frac{\lambda}{c}\phi(u)-\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta e^{-\beta u}\int_0^u\phi(y)e^{\beta y}dy-\phi'(u)$$

Kalikan kedua ruas dengan α

$$\frac{\lambda}{c}b\alpha^2e^{-\alpha u}\int_0^u\phi(y)e^{\alpha y}dy=\frac{\lambda}{c}\alpha\phi(u)-\frac{\lambda}{c}(1-b)\alpha\beta e^{-\beta u}\int_0^u\phi(y)e^{\beta y}dy-\alpha\phi'(u) \qquad (3.11)$$

Untuk mengeliminasi bentuk integral pada persamaan (3.12) maka persamaan (3.12) diturunkan terhadap *u*.
Sehingga persamaan (3.10) menjadi :

$$\phi''(u)=\frac{\lambda}{c}\phi'(u)-\frac{\lambda}{c}b\alpha\phi(u)-\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta\phi(u)+\frac{\lambda}{c}b\alpha^2e^{-\alpha u}\int_0^u\phi(y)e^{\alpha y}dy+\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta^2e^{-\beta u}\int_0^u\phi(y)e^{\beta y}dy$$

Substitusikan persamaan (3.11) ke (3.12)

$$\phi''(u)=\frac{\lambda}{c}\phi'(u)-\frac{\lambda}{c}b\alpha\phi(u)-\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta\phi(u)+\frac{\lambda}{c}\alpha\phi(u)-\alpha\phi'(u)-(\alpha-\beta)\left(\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta e^{-\beta u}\int_0^u\phi(y)e^{\beta y}dy\right) \qquad (3.13)$$

Kalikan kedua ruas dengan β

$$(\alpha-\beta)\left(\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta^2e^{-\beta u}\int_0^u\phi(y)e^{\beta y}dy\right)=\frac{\lambda}{c}\beta\phi'(u)-\frac{\lambda}{c}b\alpha\beta\phi(u)-\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta^2\phi(u)+\frac{\lambda}{c}\alpha\beta\phi(u)-\alpha\beta\phi'(u)-\beta\phi''(u) \qquad (3.14)$$

Turunkan persamaan (3.13) terhadap *u*

$$\phi'''(u)=\frac{\lambda}{c}\phi''(u)-\frac{\lambda}{c}b\alpha\phi'(u)-\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta\phi'(u)+\frac{\lambda}{c}\alpha\phi'(u)-\alpha\phi''(u)-(\alpha-\beta)\left(\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta\phi(u)\right)+(\alpha-\beta)\left(\frac{\lambda}{c}(1-b)\beta^2e^{-\beta u}\int_0^u\phi(y)e^{\beta y}dy\right) \qquad (3.15)$$

Substitusikan persamaan (3.14) pada (3.15)

$$\phi'''(u)+\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha+\beta\right)\phi''(u)+\left(\frac{\lambda}{c}b\alpha-\frac{\lambda}{c}b\beta-\frac{\lambda}{c}\alpha+\alpha\beta\right)\phi'(u)=0$$

Berdasarkan Persamaan

$$\frac{\lambda}{c}=\frac{\alpha\beta}{(1+\theta)\left(b\beta+\alpha-b\alpha\right)}$$

Maka, menjadi

$$\phi'''(u)+\left(\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)(1+\theta)\left(b\beta+\alpha-b\alpha\right)}{(1+\theta)\left(b\beta+\alpha-b\alpha\right)}\right)\phi''(u)+\left(\frac{b\alpha^2\beta-b\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-(\alpha\beta)(1+\theta)\left(b\beta+\alpha-b\alpha\right)}{(1+\theta)\left(b\beta+\alpha-b\alpha\right)}\right)\phi'(u)=0 \qquad (3.16)$$

Sebelum menyelesaikan persamaan (3.16) diberikan teorema berikut :

Teorema 3.12.1 Diberikan persamaan :

$$k''(x)+bk'(x)+ck(x)=0 \qquad (3.17)$$

Jika fungsi k(x) ada dan fungsi kuadrat p2 + bp + c = 0 mempunyai akar real p1 dan p2, dimana $p_1 \neq p_2$, maka penyelesaian persamaan (3.17) adalah :

$$k(x)=A_1e^{p_1x}+A_2e^{p_2x}$$

dengan A_1 dan A_2 merupakan konstanta.

Persamaan (3.16) mempunyai bentuk mirip dengan persamaan (3.17), sehingga (4.13)

$$p^2(u)+\left(\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)(1+\theta)\left(b\beta+\alpha-b\alpha\right)}{(1+\theta)\left(b\beta+\alpha-b\alpha\right)}\right)p+\left(\frac{b\alpha^2\beta-b\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-(\alpha\beta)(1+\theta)\left(b\beta+\alpha-b\alpha\right)}{(1+\theta)\left(b\beta+\alpha-b\alpha\right)}\right)=0$$

diperoleh nilai p_1 dan p_2 sebagai berikut :

$$p_1=-\frac{1}{2}\frac{-\alpha\beta+(\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)}{(1+\theta)(b\beta+\beta-b\alpha)}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\left((-\alpha\beta)+(\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)\right)^2}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)^2}-\frac{4(b\alpha^2\beta-b\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+\alpha\beta(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))}{(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)}\right)}$$

$$p_2=-\frac{1}{2}\frac{-\alpha\beta+(\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)}{(1+\theta)(b\beta+\beta-b\alpha)}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\left((-\alpha\beta)+(\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)\right)^2}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)^2}-\frac{4(b\alpha^2\beta-b\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+\alpha\beta(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))}{(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)}\right)}$$

$$\phi'(u)=A_1e^{p_1u}+A_2e^{p_2u} \qquad (3.18)$$

$$\phi'(0)=A_1+A_2$$

Berdasarkan Persamaan

(3.7) dan Persamaan (3.10), dengan mensubstitusikan $u = 0$ diperoleh :

$$\phi'(0) = \frac{\lambda}{c}\phi(0) = \frac{\alpha\beta}{(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) = \frac{\alpha\beta\theta}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)}$$

Sehingga,

$$A_1 + A_2 = \frac{\alpha\beta\theta}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)}$$

$$A_2 = \frac{\alpha\beta\theta}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)} - A_1 \qquad (3.19)$$

Selanjutnya, persamaan (3.18) dintegralkan diperoleh :

$$\phi(u) = \frac{A_1}{p_1}e^{p_1 u} + \frac{A_2}{p_2}e^{p_2 u} + A_3$$

Karena $\phi(\infty) = 1$ maka didapat $A_3 = 1$. Untuk $u = 0$, persamaan tersebut menjadi

$$\phi(0) = \frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} + 1$$

$$\frac{\theta}{1+\theta} = \frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} + 1$$

$$\frac{p_2 p_1}{1+\theta} + \frac{\alpha\beta\theta p_1}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)} = A_1(p_1 - p_2)$$

Sehingga diperoleh nilai A_1 dan A_2 sebagai berikut :

$$A_1 = \frac{1}{(p_1 - p_2)}\left(\frac{p_2 p_1}{1+\theta} + \frac{\alpha\beta\theta p_1}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)}\right)$$

$$A_2 = \frac{\alpha\beta\theta}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)} - \frac{1}{(p_1 - p_2)}\left(\frac{p_2 p_1}{1+\theta} + \frac{\alpha\beta\theta p_1}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)}\right)$$

Maka diperoleh

$$\phi(u) = \frac{A_1}{p_1}e^{p_1 u} + \frac{A_2}{p_2}e^{p_2 u} + 1$$

Jadi, model peluang kebangkrutan dimana besar klaim berdistribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial sebagai berikut :

$$\psi(u) = 1 - \phi(u)$$

$$\psi(u) = -\frac{A_1}{p_1}e^{p_1 u} - \frac{A_2}{p_2}e^{p_2 u}, u \geq 0 \qquad (3.20)$$

dengan

$$A_1 = \frac{1}{(p_1 - p_2)}\left(\frac{p_2 p_1}{1+\theta} + \frac{\alpha\beta\theta p_1}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)}\right)$$

$$A_2 = \frac{\alpha\beta\theta}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)} - \frac{1}{(p_1 - p_2)}\left(\frac{p_2 p_1}{1+\theta} + \frac{\alpha\beta\theta p_1}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)}\right)$$

$$p_1 = -\frac{1}{2}\frac{-\alpha\beta+(\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)}{(1+\theta)(b\beta+\beta-b\alpha)} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{((-\alpha\beta)+(\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))^2}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)^2} - \frac{4(b\alpha^2\beta-b\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+\alpha\beta(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))}{(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)}\right)}$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}\frac{-\alpha\beta+(\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)}{(1+\theta)(b\beta+\beta-b\alpha)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{((-\alpha\beta)+(\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))^2}{(1+\theta)^2(b\beta+\alpha-b\alpha)^2} - \frac{4(b\alpha^2\beta-b\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+\alpha\beta(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))}{(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)}\right)}$$

dimana θ adalah presentase tambahan premi (*premium loading*) dengan $\theta > 0$ dan parameter α merupakan nilai harapan dari besar klaim tipe 1 dengan $\alpha > 0$, parameter β merupakan nilai harapan dari besar klaim tipe 2, dengan $\beta > 0$, b merupakan proporsi banyaknya klaim tipe 1 dan (1-b) merupakan proporsi banyaknya klaim tipe 2 dengan $0 \leq b \leq 1$.

3.13 Analisis Model Peluang Kebangkrutan dimana Besar Klaim Berdistribusi Kombinasi Linier dari Dua Distribusi Eksponensial

Berdasarkan model peluang kebangkrutan yang telah diperoleh pada persamaan (4.23), dapat dianalisis bahwa besar peluang kebangkrutan dapat dipengaruhi oleh besar premium loading (θ), nilai harapan klaim (α,β), serta modal awal perusahaan asuransi (u).

Jika nilai harapan klaim (α atau β) diperbesar, maka nilai pada p_1 akan bernilai negatif dan akan semakin besar, karena terlihat pada persamaan p_1 bahwa α atau β lebih banyak terdapat pada pembilang. Nilai p_2 akan bernilai negatif dan akan semakin kecil, karena terlihat pada bentuk persamaan p_2. Dimana $p_2 < p_1$. Nilai p_1 dan p_2 tersebut berpengaruh pada besar nilai A_1 dan A_2. Pada persamaan A_1 dan A_2, maka terlihat bahwa nilai A_1 dan A_2 akan bernilai positif dan semakin besar. Dimana $A_1 > A_2$. Sehingga, jika A_1 dan A_2 akan bernilai positif dan semakin besar maka peluang kebangkrutan $\psi(u)$ akan semakin besar juga. Jadi, jika nilai harapan klaim (α atau β) diperbesar maka besar peluang kebangkrutan $\psi(u)$ akan semakin besar.

Jika nilai tambahan premi atau premium loading (θ) diperbesar, maka nilai pada p_1 akan bernilai negatif dan akan semakin kecil, karena terlihat pada persamaan p_1 bahwa θ lebih banyak terdapat pada penyebut. Nilai p_2 akan bernilai negatif dan akan semakin kecil, karena terlihat pada bentuk persamaan p_2. Dimana $p_2 < p_1$. Nilai p_1 dan p_2 tersebut berpengaruh pada besar nilai A_1 dan A_2. Pada persamaan A_1 dan A_2 terlihat bahwa θ lebih banyak terdapat pada penyebut, maka terlihat bahwa nilai A_1 dan A_2 akan bernilai positif dan semakin kecil. Sehingga, jika A_1 dan A_2 akan bernilai positif dan semakin kecil maka peluang kebangkrutan $\psi(u)$ akan semakin kecil juga. Jadi, jika nilai tambahan premi atau premium loading (θ) diperbesar, maka besar peluang kebangkrutan $\psi(u)$ akan semakin kecil.

Jika besar modal awal (u) diperbesar, dimana p_1 dan p_2 bernilai negatif maka besar $e^{p_1 u}$ akan semakin kecil. Sehingga peluang kebangkrutan $\psi(u)$ akan semakin kecil juga. Jadi, jika besar modal awal (u) diperbesar, maka besar peluang kebangkrutan $\psi(u)$ akan semakin kecil. Jika besar modal awal (u) bernilai nol, maka besar $e^{p_1 u} = 1$, dimana A_1, A_2 bernilai positif dan p_1, p_2 bernilai negatif. Sehingga, besar peluang kebangkrutan $\psi(u)$ tidak akan bernilai nol.

Berdasarkan ketiga kejadian tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Jika nilai harapan klaim (α atau β) diperbesar maka besar peluang kebangkrutan $\psi(u)$ akan semakin besar.
2. Jika nilai tambahan premi atau premium loading (θ) diperbesar, maka besar peluang kebangkrutan $\psi(u)$ akan semakin kecil.
3. Jika besar modal awal (u) diperbesar, maka besar peluang kebangkrutan $\psi(u)$ akan semakin kecil.
4. Perusahaan asuransi akan tetap dapat bertahan walaupun tidak terdapat modal awal.

3.14 Perhitungan Numerik

Perhitungan numerik akan dilakukan dengan menggunakan software Maple 11.

3.14.1 Parameter

Untuk menentukan nilai peluang kebangkrutan, dimana besar klaim berdistribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial, ditententukan nilai dari beberapa parameter dan peubah yang diperlukan. Peubah dari peluang kebangkrutan dimana klaim tersebar eksponensial campuran adalah u. Parameter dari peluang kebangkrutan dimana besar klaim berdistribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial adalah α dan β, dengan proporsi b dan 1-b.

Modal awal (u) ditentukan sebesar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dan 10. Untuk melihat pengaruh besar premium loading (θ), nilai θ dipilih 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 ,parameter $\alpha = 2$, $b = 0.5$ dan parameter $\beta = 0.5$. Serta masing-masing diberikan tabel dan grafiknya. Untuk melihat pengaruh besar nilai harapan dari klaim (α), maka nilai α dipilih 4, 8, 12, 16 dan 20, parameter $b = 0.5$, $\beta = 0.5$ dan nilai $\theta = 0.1$. Serta masing-masing diberikan tabel dan grafiknya.

3.15 Analisis Hasil Perhitungan Numerik

Setelah memperhatikan hasil perhitungan numerik, menunjukkan bahwa :

1. Jika modal awal semakin besar, maka peluang kebangkrutan perusahaan asuransi semakin kecil.
2. Jika presentase tambahan premi (premium loading) semakin besar, maka peluang kebangkrutan perusahaan semakin kecil.
3. Jika nilai harapan klaim semakin besar maka peluang kebangkrutan perusahaan asuransi tersebut semakin besar.
4. Pada saat modal awal perusahaan sebesar 0, peluang kebangkrutan yang diperoleh tidak 1. Hal ini berarti tanpa modal awal, perusahaan asuransi masih dapat bertahan.

SIMPULAN

1. Model peluang kebangkrutan pada proses surplus yang mengikuti proses Poisson majemuk dengan persamaan integro-diferensial dimana besar klaim distribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial adalah sebagai berikut :

$$\psi(u) = -\frac{A_1}{p_1} e^{p_1 u} - \frac{A_2}{p_2} e^{p_2 u}, u \geq 0$$

dengan

$$A_1 = \frac{1}{(p_1 - p_2)} \left(\frac{p_2 p_1}{1+\theta} + \frac{\alpha\beta\theta p_1}{(1+\theta)^2 (b\beta + \alpha - b\alpha)} \right)$$

$$A_2 = \frac{\alpha\beta\theta}{(1+\theta)^2 (b\beta + \alpha - b\alpha)} - \frac{1}{(p_1 - p_2)} \left(\frac{p_2 p_1}{1+\theta} + \frac{\alpha\beta\theta p_1}{(1+\theta)^2 (b\beta + \alpha - b\alpha)} \right)$$

$$p_1 = -\frac{1}{2} \frac{-\alpha\beta + (\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta + \alpha - b\alpha)}{(1+\theta)(b\beta + \beta - b\alpha)} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{((-\alpha\beta) + (\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))^2}{(1+\theta)^2 (b\beta+\alpha-b\alpha)^2} - \frac{4(b\alpha^2\beta - b\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + \alpha\beta(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))}{(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)} \right)}$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} \frac{-\alpha\beta + (\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta + \alpha - b\alpha)}{(1+\theta)(b\beta + \beta - b\alpha)} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{((-\alpha\beta) + (\alpha+\beta)(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))^2}{(1+\theta)^2 (b\beta+\alpha-b\alpha)^2} - \frac{4(b\alpha^2\beta - b\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + \alpha\beta(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha))}{(1+\theta)(b\beta+\alpha-b\alpha)} \right)}$$

dimana θ adalah presentase tambahan premi dari nilai harapan klaim dan α,β,b adalah parameter distribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial.

2. Nilai harapan klaim sebanding dengan besar peluang kebangkrutan. Jadi, semakin besar nilai

harapan klaim maka semakin besar juga peluang kebangkrutan perusahaan tersebut.

3. Besar modal awal (u) dan *premium loading* (θ) berbanding terbalik dengan besar peluang kebangkrutan. Jadi, semakin besar modal awal (u) dan *premium loading* (θ) maka semakin kecil peluang kebangkrutan kebangkrutan perusahaan tersebut.
4. Perusahaan asuransi masih dapat bertahan walaupun tidak mempunyai modal awal.

SARAN

Berdasarkan kesimpulan yang diperoleh, maka untuk memperkecil peluang kebangkrutan suatu perusahaan asuransi dapat menambah besar modal awal dan besar tambahan premi (*premium loading*).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ammirudin. 2008. *Penentuan peluang bertahan dalam model risiko klasik dengan menggunakan Transformasi* Laplace. Tesis S2 Jurusan Matematika FMIPA IPB. http://repository.ipb.ac.id/handle/123456789/41454. Tanggal akses 8 April 2013.

[2] Andriani Yuli. Metode Konvolusi dalam Menghitung Peluang Kebangkrutan suatu Perusahaan asuransi. Tesis ITB. http://isjd.pdii.lipi.go.id/admin/jurnal/11208539543.pdf. Tanggal akses 2 Februari 2013.

[3] Al Hakim, Soleh. 2010. *Peluang Kebangkrutan Asuransi Dimana Klaim Menyebar Gamma (2,β)*. Tesis S2 Jurusan Matematika FMIPA IPB. http://repository.ipb.ac.id/bitstream/handle/123456789/47370/2010sah.pdf?sequence=1 . Tanggal akses 16 Februari 2013.

[4] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C, Jones, D.A. and Nesbitt, C.J. 1997. *Actuarial Mathematics*. Lthasca, III : Society of Actuaries.

[5] Cristina, Maria. 2006. *Aspect of Ruin Probability in Insurance*. http://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full97422.pdf . Tanggal akses 14 Januari 2013.

[6] Dickson, D.C.M. 2005. *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge : University Press.

[7] Efendy, Nuraita. 2005. *Proses Poisson*. Skripsi S1 Jurusan Matematika FMIPA UNESA.

[8] Garcia JMA. 2005. Explicit Solutions for Survival Probabilities in The Classical Risk Model. *Astin Bulletin* 2005, Vol. 35 No.I, 113-130.

[9] Grimmet GR, Stirzaker DR. 2001. *Probability and Random Processes*. Ed.ke-3. Oxford: Clarendon Press.

[10] Hendro Permadi, Abadyo. 2004. *Metoda Statistika Praktis (Edisi revisi)*. Universitas Negeri Malang.

[11] Hogg RV, McKean JW, Craig AT. 2005. *Instroduction to Mathematical Statistics*. New Jersey: Prentice Hall, Engelwood Cliffs.

[12] Kass, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. 2001. *Modern actuarial Risk Theory*. Netherland : Kluwer Academic Publishers.

[13] Klugman SA, Panjer HH, Willmot GE. 1998. *Loss Models- from Data to Decisions*. New York:John Wiley.

[14] Montgomery Douglas C, Runger George C. 2007. *Applied Statistics and Probability for Engineers*, 4th Edition.

[15] Ross SM. 1996. *Stochastic Processes*. New York: John Woley & Sons, Inc.